§ 4. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРОСТЕЙШИХ ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

Моменты инерции тел сложной формы часто удается вычислить, если их предварительно разбить на тела простой формы. Моменты инерции сложных тел получают суммируя моменты инерции частей этих тел. Получим формулы для вычисления моментов инерции некоторых однородных простейших тел.

Однородный стержень

Имеем однородный стержень длиной l и массой M (рис. 25). Направим по стержню ось Ox. Вычислим момент инерции стержня относительно оси Oz, проходящей перпендикулярно стержню через его конец. Согласно определению момента инерции сплошного тела относительно оси, имеем

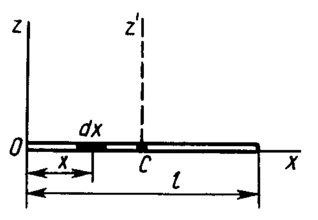

Рис. 25

$$J_{Oz}=\int_{(l)} x^2\mathrm{d}m=\rho\int_0^l x^2\mathrm{d}x,$$

так как $\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}x$, где $\rho=M/l$ — плотность стержня.

Вычисляя интеграл, получаем

$$J_{Oz}=\frac{M}{l}\int_0^l x^2\mathrm{d}x=\frac{M}{l}\frac{l^3}{3}=M\frac{l^2}{3}.$$

Таким образом,

$$J_{Oz}=M\frac{l^2}{3}. \tag{11}$$

Момент инерции стержня относительно оси Cz', проходящей через центр масс и параллельной оси Oz, определяется по теореме Штейнера:

$$J_{Oz}=J_{Cz'}+Md^2 \quad \text{где} \quad d^2=(l/2)^2=l^2/4.$$

Следовательно,

$$J_{Cz'}=J_{Oz}-Md^2=M\frac{l^2}{3}-M\frac{l^2}{4}=M\frac{l^2}{12},$$

т. е.

$$J_{Cz'}=M\frac{l^2}{12}. \tag{12}$$

Прямоугольная пластина

Прямоугольная тонкая пластина имеет размеры l и h и массу M (рис. 26). Оси Ox и Oy расположим в плоскости пластины, а ось Oz — перпендикулярно ей. Для определения момента инерции пластины относительно оси Oy разобьем пластину на элементарные полоски шириной $\mathrm{d}x$ и массой $\mathrm{d}m=\rho h\mathrm{d}x$ и проинтегрируем по x от 0 до l. Получим

$$J_y=\int_0^M x^2\mathrm{d}m=\rho h\int_0^l x^2\mathrm{d}x=\rho h\frac{l^3}{3}=M\frac{l^2}{3},$$

так как $\rho hl=M$.

Аналогичные вычисления для оси Ox дадут

$$J_x=M\frac{h^2}{12},$$

так как эта ось Ox проходит через середину пластины.

Для определения момента инерции пластины относительно оси Oz следует предварительно вычислить момент инерции отдельной заштрихованной полоски относительно параллельной оси $O'z'$ по формуле (12) для стержня и применить затем теорему Штейнера. Для элементарной полоски имеем

$$\mathrm{d}m\frac{h^2}{12}+x^2\mathrm{d}m.$$

Интегрируя это выражение в пределах от 0 до l, получим

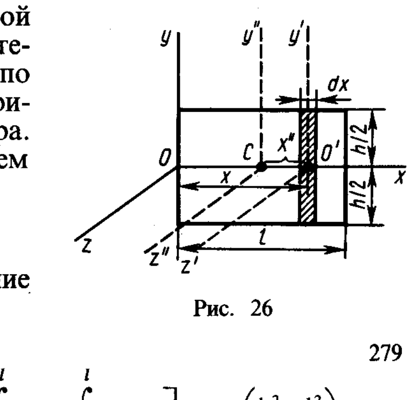

Рис. 26

$$J_z=\int_0^M\left(\mathrm{d}m\frac{h^2}{12}+x^2\mathrm{d}m\right)=\rho h\left[\frac{h^2}{12}\int_0^l\mathrm{d}x+\int_0^l x^2\mathrm{d}x\right]=M\left(\frac{h^2}{12}+\frac{l^2}{3}\right).$$

Итак, для моментов инерции пластины относительно осей координат получены следующие формулы:

$$J_x=M\frac{h^2}{12};\quad J_y=M\frac{l^2}{3};\quad J_z=M\left(\frac{h^2}{12}+\frac{l^2}{3}\right). \tag{13}$$

Круглый диск

Имеем тонкий однородный диск радиусом R и массой M (рис. 27). Вычислим момент его инерции J_0 относительно точки O. Этот момент инерции для тонкого диска совпадает с моментом инерции J_z относительно координатной оси Oz, перпендикулярной плоскости диска. Разобьем диск на концентрические полоски шириной $\mathrm{d}r$, принимаемые в пределе за материальные окружности. Масса полоски равна ее площади $2\pi r\mathrm{d}r$, умноженной на плотность $\rho=M/(\pi R^2)$, т. е. $\mathrm{d}m=\rho\cdot 2\pi r\mathrm{d}r$. Момент одной полоски относительно точки O равен $r^2\mathrm{d}m$. Для всего диска

$$J_O=\int_0^M r^2\mathrm{d}m=\rho\cdot 2\pi\int_0^R r^3\mathrm{d}r=\rho\cdot 2\pi\frac{R^4}{4}=M\frac{R^2}{2}.$$

Таким образом,

$$J_z=J_O=MR^2/2. \tag{14}$$

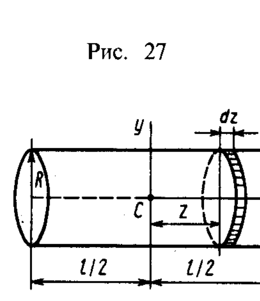

Рис. 27

Для осей координат Ox и Oy, расположенных в плоскости диска, в силу симметрии $J_x=J_y$. Используя (8), имеем $2J_O=J_x+J_y+J_z$, но $J_z=J_O$, поэтому

$$J_x=J_y={}^1/_2\,J_O=MR^2/4. \tag{15}$$

В случае тонкого проволочного кольца или круглого колеса, у которых масса распределена не по площади, а по его ободу, имеем

$$J_z=J_O=MR^2;\quad J_x=J_y={}^1/_2\,MR^2. \tag{16}$$

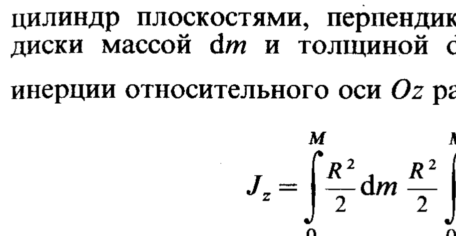

Рис. 28

Круглый цилиндр

Для круглого однородного цилиндра, масса которого M, радиус R и длина l (рис. 28), вычислим прежде всего его момент инерции относительно продольной оси симметрии Oz. Для этого разобьем

цилиндр плоскостями, перпендикулярными оси Oz, на тонкие диски массой $\mathrm{d}m$ и толщиной $\mathrm{d}z$. Для такого диска момент инерции относительного оси Oz равен $\frac{R^2}{2}\mathrm{d}m$. Для всего цилиндра

$$J_z=\int_0^M\frac{R^2}{2}\mathrm{d}m=\frac{R^2}{2}\int_0^M\mathrm{d}m=M\frac{R^2}{2},$$

т. е.

$$J_z=MR^2/2. \tag{17}$$

Вычислим момент инерции цилиндра относительно его поперечной оси симметрии Cy. Для этого разобьем цилиндр поперечными сечениями, перпендикулярными его продольной оси, на элементарные диски толщиной $\mathrm{d}z$. Момент инерции элементарного диска массой $\mathrm{d}m=\pi R^2\rho\mathrm{d}z$ относительно оси Cy, по теореме Штейнера, $\mathrm{d}m\frac{R^2}{4}+\mathrm{d}mz^2$.

Чтобы получить момент инерции всего цилиндра относительно оси Cy, следует проинтегрировать полученное выражение по z в пределах от 0 до $l/2$ и результат удвоить. Получим

$$J_{Cy}=\int_0^M(R^2/4+z^2)\mathrm{d}m=2\pi R^2\rho\int_0^{l/2}(R^2/4+z^2)\mathrm{d}z=\pi R^2l\rho\left(\frac{R^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right).$$

Но $\pi R^2l\rho=M$ — масса цилиндра. Следовательно,

$$J_{Cy}=M(R^2/4+l^2/12).$$

Таким образом, момент инерции цилиндра относительно его поперечной оси симметрии получается как сумма моментов инерции относительно этой оси диска и стержня, массы которых равны по отдельности массе цилиндра. Диск получается из цилиндра симметричным сжатием его с торцов до срединной плоскости при сохранении радиуса, а стержень — сжатием цилиндра в однородный стержень, расположенный по оси цилиндра, при сохранении длины.

Шар

Пусть масса шара M, радиус R (рис. 29). Разобьем шар на концентрические сферические слои радиусом r и толщиной $\mathrm{d}r$. Масса такого слоя $\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V$, где $\rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{{}^4/_3\pi R^3}$; $\mathrm{d}V$ — объем слоя, равный произведению площади поверхности сферы радиусом r на толщину слоя $\mathrm{d}r$, т. е. $\mathrm{d}V=4\pi r^2\mathrm{d}r$. Таким образом, масса элементарного слоя $\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V=\rho 4\pi r^2\mathrm{d}r$. Для момента инерции шара относительно его центра O имеем

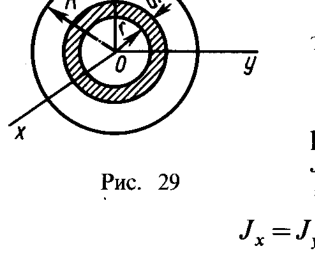

Рис. 29

$$J_O=\int_0^M r^2\mathrm{d}m=\rho 4\pi\int_0^R r^4\mathrm{d}r=\rho 4\pi\frac{R^5}{5}=\frac{3}{5}MR^2,$$

т. е.

$$J_O={}^3/_5\,MR^2. \tag{18}$$

Для осей координат, проходящих через центр шара, в силу симметрии $J_x=J_y=J_z$. Но $2J_O=J_x+J_y+J_z=3J_x=3J_y=3J_z$. Следовательно,

$$J_x=J_y=J_z={}^2/_3\,J_O={}^2/_5\,MR^2. \tag{19}$$